Chap 3

不定积分

Chap 3.1

不定积分的
概念和性质

3.1.1 不定积分的概念

- 原函数

对函数 $f(x)$, 若存在 $F(x)$ 使得

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 的一个**原函数**

例　$(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow x^3$ 是 $3x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 的一个原函数

- 原函数不惟一
- $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

  $\Rightarrow F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的全体原函数

➢ 连续函数必有原函数

■ 不定积分

$f(x)$在I 的全体原函数称为$f(x)$在I 的**不定积分**

记为

积分变量

$$\int f(x)dx$$

积分号

积分微元

被积函数

➢ 若$F(x)$ 是$f(x)$ 的一个原函数

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

3.1.2 积分表

$$\int 0dx = C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^{x} dx = \frac{1}{\ln a} a^{x} + C \qquad \int e^{x} dx = e^{x} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^{2} x dx = \tan x + C \qquad \int \csc^{2} x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| \sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right| + C$$

- 象小学生背九九表一样地背出积分表!

3.1.3 不定积分性质

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ 或 $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

$\int f'(x)dx = f(x) + C$ 或 $\int df(x) = f(x) + C$

- $f(x)$, $g(x)$有原函数，$\forall k \in \mathbf{R}$，则

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int [k f(x)]dx = k\int f(x)dx$$

例　求下列不定积分

(1) $\int(\sqrt{x}+2e^{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{2-x^{2}}})dx$

(2) $\int(\sec^{2}x+\frac{1}{1+x^{2}})dx$

(3) $\int\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}dx$

(4) $\int(3^{x}-2^{x-1})dx$

(5) $\int\frac{dx}{x^{2}(x^{2}-4)}$

(6) $\int(\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x^{2}+4}})dx$

H.W　习题3

2　(1)　(2)　(3)　(4)　(6)　(11)

(14)　(16)　(18)　(20)　(21)

(23)　(24)　(25)

Chap 3.2

换元积分法

3.2.1 第一换元法（凑微分法）

■ 不定积分的凑微分法

若 $\int f(x)dx = F(x) + C$, $\varphi(x)$可导，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$$

➢ 过程 $= \int f(\varphi(x))d\varphi(x) =$

➢ 观察哪部分可凑成 $\varphi' dx = d\varphi$, 而使得微分号前剩下的部分恰好是 φ 的可积表达式

例 求不定积分

$$\int \sin^5 x \cos x dx$$

注意
$\cos x dx = d \sin x$

例　求不定积分

(1) $\int xe^{x^2}dx$

(2) $\int \cot x dx$

(3) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

(4) $\int (2x+3)^{10}dx$

(5) $\int \frac{dx}{\cos x}$

(6) $\int \sin^2 x\cos^3 xdx$

含sinx的齐次幂因子

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

(8) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{2-2x+x^2}}dx$

(10) $\int \frac{dx}{2+e^x}$

$$(11)\int\frac{dx}{(x^2-3x-4)}\qquad(12)\int\frac{4x-3}{x^2+4}dx$$

$$(13)\int\frac{x^2}{4-x^2}dx$$

H.W 习题3

3 (1) – (9) (12) – (15) (17) – (19)

(21) (22)

3.2.2 第二换元法

- 不定积分的第二换元法

若$\int f(\psi(t))\psi'(t)dt = F(t)+C$,且$\psi$单调可导,$\psi' \neq 0$

则

$$\int f(x)dx = F(\psi^{-1}(x))+C$$

➢ 对$\int f(x)dx$作变量代换$x=\psi(t)$

$\Rightarrow \int f(\psi(t))\psi'(t)dt$ 可积 $\Rightarrow$ $F(t)+C$

$\boxed{t=\psi^{-1}(x)}$

例 求下列不定积分

(1) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}, (a>0)$

(2) $I=\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$

(3) $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+2x-1}} \quad (x>0)$

(4) $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

$$(5)\quad I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x+3}}$$

$$(6)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

H.W

习题3

3 (26) – (29) (31) (33) (35) (36)

Chap 3.3

分部积分法

5.4.3 分部积分法

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \Rightarrow \quad uv' = (uv)' - u'v$$

导出(在u', v'可积时)

- 分部积分法(不定积分)

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

$$\downarrow \qquad \qquad \uparrow$$

- 过程 $\int udv = uv - \int vdu$

- 如何选择 v'

三角函数

一般而言依如下次序：$e^{\alpha x}, \sin ax$(或$\cos ax$)$, x^m$

➢ 同时需考虑 u： u的导数不应变得复杂

例　求下列不定积分

(1) $\int x\sin x dx$

(2) $\int x^2 e^x dx$

(3) $\int x\ln x dx$

(4) $\int x\tan^2 x dx$

(5) $I=\int e^{2x}\sin x dx$

(6) $\int \arctan x dx$

(7) $I=\int \sec^3 x dx$

(8) $I=\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

Chap3.4

某几种函数的积分法

3.4.某些函数积分法要点

- 有理函数的积分

形式 $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

其中$P(x),Q(x)$均为多项式

- 步骤

(1) 化假分式 = 多项式 + 真分式

(2) 分母分解为一次式或二次三项式

(3) 分式分解为一些最简分式之和后逐项积分

例　计算下列积分

(1) $\int \frac{x^3-3x^2+4}{x^2-5x+6}dx$　　(2) $\int \frac{x^2+14}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx$

- 三角函数的积分

- 尽量用凑微分法，若函数各项均含 $\sin x$ (或 $\cos x$) 的奇次幂，可凑成 $\cos x$ (或 $\sin x$) 的微分，若 $\sin x$ 和 $\cos x$ 幂次和为偶数，可凑成 $\tan x$ 的微分

例　求下列积分

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} dx$

无理函数的积分

- 除了对二次根式采用三角变换或倒变换

被积函数中形如

$\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 可直接设为 t (换元)

例 求积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$

H.W 习题3

5 (2) (4) (8)

3 (20) (24) (33) (34)